TECHNIQUES & MÉTHODES S12

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ÉQUIVALENT D'UNE FONCTION

■■■ Comment obtenir un équivalent d'une fonction au voisinage de a

La façon la plus simple est évidemment à utiliser la limite non nulle : si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbf{R}^\star$ un réel non nul, alors $f(x) \sim_a \ell$. Sinon, il y a trois pistes possibles. J'utilise au choix :

- les OPA ;
- le changement de variable;
- le lien avec la dérivée de f en a.

Comment se ramener au voisinage de 0

Comme les équivalents usuels sont presque tous au voisinage de 0, je commence par me ramener au voisinage de 0 au moyen du changement de variable adapté :

- $x = a + t$, avec $t \to 0$ si $a \in \bar{I}$;
- $x = 1/t$, avec $t \to 0^\pm$, si $a = \pm\infty$.

■■■ Comment obtenir un équivalent par changement de variable

Si f est composée de fonctions usuelles, $f(x) = g \circ y(x)$. J'effectue le changement de variable $y = y(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} y(x) = b \\ \bullet \ g(y) \sim_b h(y) \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad g \circ y(x) \sim_a h \circ y(x)$$

Ainsi, je calcule $b = \lim\limits_{x\to a} y(x)$, puis je détermine un équivalent de g au voisinage de b : $g(y) \sim_b h(y)$ et conclus par composition à droite que $f(x) = g \circ y(x) \sim_a h \circ y(x)$.

■■■ Comment obtenir un équivalent par OPA

Les opérations algébriques directement compatibles

Si f est construite comme *produit*, *puissance* ou *quotient* de fonctions usuelles, j'utilise les propriétés de compatibilité des équivalents avec ces opérations.

Comment déterminer un équivalent d'une somme

Si f est construite comme *somme* de fonctions, on n'obtient pas toujours un équivalent en faisant la somme des équivalents car la somme n'est pas compatible avec le calcul des équivalents... **prudence !**

Pour déterminer un équivalent de $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ au voisinage de a, je commence par déterminer un équivalent simple de chaque terme :

$$f_1(x) \sim_a g_1(x) \quad et \quad f_2(x) \sim_a g_2(x)$$

- **si** $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$ dans un voisinage de a, alors

$$f(x) \sim_a g_1(x) + g_2(x) \ ;$$

- dans le cas général, je *range* les termes par ordre de négligeabilité. Si $f_2(x) = o_a\left(f_1(x)\right)$, ou de façon équivalente si $g_2(x) = o_a\left(g_1(x)\right)$, alors la somme est équivalente au *terme dominant*

$$f(x) \sim_a f_1(x) \sim_a g_1(x) \ ;$$

- finalement, il peut arriver que les termes ne soient pas de même signe et qu'aucun ne soit négligeable par rapport à l'autre, pas de bol ... dans ce cas, j'utilise la **caractérisation par la différence** pour obtenir

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & g_1(x) + o(g_1(x)) \\ f_2(x) & = & g_2(x) + o(g_2(x)) \end{array}$$

  Comme il s'agit d'égalité fonctionnelles, je peux ajouter terme à terme et utiliser les règles de calcul avec les "o".

■■■ Comment obtenir un équivalent d'un accroissement de f

Les équivalents usuels ont tous été établis à l'aide de la dérivée, si f une fonction dérivable en $a \in I$ et vérifie $f'(a) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$